Утверждаю
Директор [illegible]

МБОУ «Гимназия №7» г. Грозного

Предпрофильный курс по математике
«В мире математики»

Составитель : Магомедова М.А-М.

2017-2018 учебный год.

Пояснительная записка.

Предпрофильный курс «В мире математики» предназначен для учащихся 9-х классов, интересующихся математикой, однако, много интересного в нем могут найти и учащиеся 10-11 классов. Данный курс можно изучать целостно, как отдельный курс, или использовать его элементы как на уроках математики 8-9 классов, так и на занятиях кружков и факультативов. Предлагаемый курс более полно освещает намеченные в школьном курсе математики вопросы, связанные с историей, решением различных видов квадратных уравнений, а также уравнений, сводящихся к ним.

Стоит отметить, что навыки решения различных видов квадратных уравнений необходимы каждому ученику, желающему успешно подготовиться к итоговой аттестации по математике, и будет хорошим подспорьем для подготовки к математическим олимпиадам и дальнейшему обучению в профильном математическом классе.

Познавательный материал курса позволит школьникам не только выработать умения и навыки решения квадратных уравнений, но и поможет им систематизировать, расширить и укрепить знания, связанные с квадратными уравнениями, подготовиться к дальнейшему изучению тем, использующих навыки решения квадратных уравнений.

Наряду с обеспечением прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений данный курс предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических и исследовательских способностей, ориентация на профессии, связанные с математикой, выбору профиля дальнейшего обучения.

Учебный процесс данного курса предполагает использование типового школьного оборудования кабинета математики.

Цель и задачи курса.

Цель: развитие у ученика умения сделать ответственный выбор профиля и способа дальнейшего обучения.

Задачи:

1) создание у учащихся положительной мотивации обучения на профильном курсе;

2) помощь ученикам в оценке своего потенциала с точки зрения образовательной перспективы;

3) помощь ученикам утвердится в сделанном ими выборе направления дальнейшего обучения, связанного с математикой, или отказаться от него;

4) восполнение содержательных пробелов основного курса, придающих ему необходимую целостность;

5) освоение нестандартных приемов решения квадратных уравнений и уравнений к ним сводящихся.

Организация учебного процесса.

Программа элективного курса рассчитана на 8 часов и предполагает знакомство с теорией и практикой рассматриваемых вопросов. Предлагаемые задачи различны по уровню сложности: от простых упражнений на применение изученных формул до достаточно трудных заданий. В основном занятия состоят из 2-х частей: задачи, решаемые с учителем, и задачи, для самостоятельного (или домашнего) решения.

Основные формы организации учебных занятий: лекция, диалог, объяснение, практикум, различные формы групповой и индивидуальной работы.

Количество часов и объем изучаемого материала позволяют принять темп продвижения по курсу, который соответствует возрасту учащихся.

Отработка и закрепление основных умений и навыков осуществляется на большом числе доступных учащимися упражнений. В то же время это не означает монотонной и скучной деятельности, так как курс наполнен заданиями, разнообразными по форме и содержанию.

Формирование важнейших умений и навыков происходит на фоне развития умственной деятельности - дети учатся анализировать конкретные ситуации, замечать существенное, подмечать общее и делать обобщения, переносить известные приемы в нестандартные ситуации, находить пути их решения.

Условием, позволяющим правильно построить учебный процесс, является то, что изучение каждой темы начинается с проведения установочных занятий, выделяется главное и, исходя из этого, дифференцируется материал: выделяются те задачи, на которых происходит отработка ЗУН, и, те, которые служат развитию, побуждению интереса и др., и в соответствии с этим они не дублируются.

Материал курса доступен для обучения, способствует развитию логического мышления учащихся, повышению интеллектуального и творческого уровня, математической культуре. В процессе работы динамика интереса к элективному курсу будет фиксироваться с помощью диагностики на первом и последнем занятии. На всех этапах занятий предусматривается активный диалог с учащимися. Доля самостоятельности учеников при изучении курса достаточно велика, они могут проявлять активность, реализовывать свой творческий потенциал.

Большинство задач данного курса – это задания, в которых предлагается самостоятельно установить алгоритм решения, т.е. провести небольшое самостоятельное математическое исследование, что существенно способствует развитию логического мышления.

Итоговой формой контроля, подводящей изучение курса к логическому завершению, является проведение круглого стола.

Для учащихся, которые пока не проявляют заметного интереса к математике, эти занятия могут стать толчком к увлечению предметом и вызвать желание узнать больше. Программа может быть эффективно использована в 9-ом классе с любой степенью подготовленности, способствует развитию познавательных интересов учащихся, предоставляет возможность подготовиться к сознательному выбору математического профиля обучения или отказ от него.

Содержание курса.

Тема 1. Квадратные уравнения.

1. Неполные квадратные уравнения.
2. Полные квадратные уравнения.
3. Теорема Виета.

Тема 2. Нестандартные способы решения квадратных уравнений.

1. Частные случаи нахождения корней полного квадратного уравнения.
2. Решение квадратных уравнений методами геометрической арифметики.
3. Решение квадратных уравнений с применением циркуля и линейки.

Тема 3. Решение уравнений сводящихся к квадратным.

1. Квадратные уравнения с модулем.
2. Решение уравнений методом разложения на множители.
3. Решение уравнений методом введения новой переменной.
4. Решение иррациональных уравнений.
5. Решение возвратных уравнений.
6. Решение симметричных уравнений.

Календарно- тематическое планирование.

№ п/п	Тема занятия	Время	Формы организации учебной деятельности	Формы контроля
	1. Квадратные уравнения.	**2 часа**		
1.	Неполные квадратные уравнения. Полные квадратные уравнения. Теорема Виета.		Беседа. Коллективное и самостоятельное решение заданий. Лекция. Практикум. Самостоятельное решение заданий.	Диагностика. Проверка самостоятельно решенных уравнений. Математический диктант.
2.	Обобщающее занятие-игра.		Математическая игра.	Демонстрация решенных заданий.
	2. Нестандартные способы решения квадратных уравнений.	**3 часа**		
3.	Частные случаи нахождения корней полного квадратного уравнения.		Объяснение. Коллективное и самостоятельное решение заданий.	Самостоятельная работа. Составление таблицы-памятки.
4.	Решение квадратных уравнений методами геометрической арифметики.		Лекция с элементами исследования.	Творческое домашнее задание.
5.	Решение квадратных уравнений с применением циркуля и линейки.		Объяснение. Работа в парах.	Конспект. Проверка самостоятельно решенных уравнений.
	3. Решение уравнений сводящихся к квадратным.	**3 часа**		
6.	Квадратные уравнения с модулем.		Беседа. Индивидуальные консультации с учителем.	Решение уравнений с комментариями. Конспект.
7.	Решение уравнений методом разложения на множители. Решение уравнений методом введения новой переменной.		Объяснение. Работа в парах. Объяснение Практикум..	Решение уравнений с комментариями. Конспект.

8.	Итоговое занятие.		Круглый стол.	Дискуссия. Обсуждение различных способов решения уравнений. Диагностика.

Ожидаемый результат.

В результате изучения темы «Квадратные уравнения» курса учащийся может:

- усвоить основные приемы решения различных видов квадратных уравнений;
- научиться устно решать простые квадратные уравнения, используя теорему Виета.

В результате изучения темы «Нестандартные способы решения квадратных уравнений» курса учащийся может:

- научиться устно решать простые квадратные уравнения, используя зависимости между коэффициентами квадратного уравнения;
- получить представление о решении квадратных уравнений методами геометрической арифметики и с использованием циркуля и линейки;

В результате изучения темы «Решение уравнений сводящихся к квадратным» курса учащийся может:

- научиться применять различные методы для сведения уравнений к квадратным;
- научиться решать основные типы квадратных уравнений с модулем, иррациональных уравнений, возвратных и симметричных уравнений.

Итоговое занятие – заседание «Круглого стола» на тему: «Самое красивое решение. За и против» предполагает дискуссию о различных способах решения предложенных учащимся уравнений, т.к. каждое из них может быть решено несколькими способами или комбинацией различных методов. Такая форма занятия дает возможность для индивидуальной и коллективной исследовательской деятельности.

Прохождение курса завершается качественной оценкой работы учащихся, являющейся результатом отслеживания их личностного роста.

Качественные критерии оценки:

- стремление расширить знания путем самообразования;
- активность при самостоятельной деятельности;
- разнообразие заданий, решаемых на промежуточном контроле;
- степень сложности решенных задач.

Количественные критерии оценки:

- каждая самостоятельно решенная задача оценивается одним баллом;
- за решение заданий повышенной сложности добавляется еще один балл;
- активность при коллективной работе дает один балл;
- выступление с сообщением, выполнение заданий исследовательского характера добавляет по баллу за каждый вид деятельности.

Все баллы на каждом занятии вносятся в оценочный лист ученика.

Методические материалы к занятиям.

Тема 1. Квадратные уравнения.

Занятие 1: Неполные квадратные уравнения.

Цели:
- обобщить и систематизировать знания учащихся по теме неполные квадратные уравнения; закрепить изучаемый материал в ходе решения уравнений.

Ход занятия.

1. Объяснение.
Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$ называется квадратным.
Если в квадратном уравнении хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называется неполным. Существуют три вида неполных квадратных уравнений.

1) $c = 0$, тогда уравнение имеет вид $ax^2+bx=0$. Его решают с помощью вынесения общего множителя x за скобки.
$x(ax+b)=0.$

Произведение двух множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю

$x=0$ или $ax+b=0;$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

В уравнениях такого вида всегда один корень равен нулю.

2) $b=0$, тогда уравнение примет вид $ax^2+c=0;$
$ax^2=-c;$
$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней.

Вывод: Если уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни, то они равны по модулю, но противоположны по знаку.

3) $b = c = 0$, тогда уравнение принимает вид $ax^2=0;$
$x^2=0;$
$x =0.$

Уравнение такого вида имеет единственный корень (двойной кратности) равный нулю.

2. Закрепление.

1. Устно:

1) Выберите, какие из данных уравнений имеют:

а) корни одинаковые по модулю и противоположные по знаку;
б) два корня, один из которых равен нулю;
в) один корень.
2) Решите устно уравнения:

1) $3x^2 - 6 = 0;$

2) $2{,}5x^2 = 0;$

3) $5x^2 - 15x = 0;$

4) $\sqrt{7}x^2 = 0;$

5) $2x^2 - 15 = 0;$

6) $x^2 - 18x = 0.$

2. Решите уравнения письменно:

1) $\frac{1}{9}x^2 - 9 = 0;$

2) $3x^2 - 8x = 0;$

3) $12x = 7x^2;$

4) $\frac{2x^2 - 3x}{4} = \frac{x^2 + 2x}{3};$

5) $\frac{(2x-3)^2}{2} = \frac{6+4x}{5};$

6) $x^2 - 5|x| = 0;$

7) $2x^2 + |x| - 3x = 0;$

8) $4x^2 - \frac{x}{|x|} = 0;$

9) $x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0.$

Приведем решение уравнения №7.

$2x^2 + |x| - 3x = 0.$

1 случай: $x \geq 0$, тогда $|x| = x$ уравнение примет вид:

$2x^2 + x - 3x = 0;$

$2x^2 - 2x = 0;$

$2x(x-1) = 0;$

$x = 0$ или $x - 1 = 0;$

$x = 1.$

Оба корня удовлетворяют условию $x \geq 0.$

2 случай: $x < 0$, тогда $|x| = -x$ и уравнение примет вид:

$$2x^2 - x - 3x = 0;$$

$$2x^2 - 4x = 0;$$

$$2x(x - 2) = 0;$$

$x = 0$ или $x - 2 = 0;$

$x = 2.$

Оба корня не удовлетворяют условию $x < 0$. Следовательно, являются посторонними.
Ответ: 0; 1.

3. Дидактические материалы для индивидуальной работы.
Решите уравнения:

1) $\frac{2}{7}x^2 - 3{,}5 = 0;$

2) $15x + 11x^2 = 0;$

3) $\frac{5x - x^2}{2} = \frac{x^2 + 3x}{5};$

4) $3x^2 + 4|x| = 0;$

5) $4x^2 - 3|x| + x = 0.$

Полные квадратные уравнения.

Цели:
- проверить усвоение учащимися материала;
- обобщить и систематизировать знания учащихся по теме «Полные квадратные уравнения»;
- познакомить с историей вопроса;
- закрепить изученный материал в ходе решения упражнений.

Ход занятия.

1. Математический диктант.

Вариант 1.
Решите уравнения:

1) $28x^2 = 0;$

2) $x^2 - 121 = 0;$

3) $x^2 - 5x = 0;$

4) $x^2 + 25 = 0;$

5) $3x^2 - 27x = 0.$

Вариант 2.
Решите уравнения:

1) $x^2 - 7x = 0;$

2) $x^2 + 36 = 0;$

3) $47x^2 = 0;$

4) $x^2 - 169 = 0;$

5) $4x^2 - 16x = 0.$

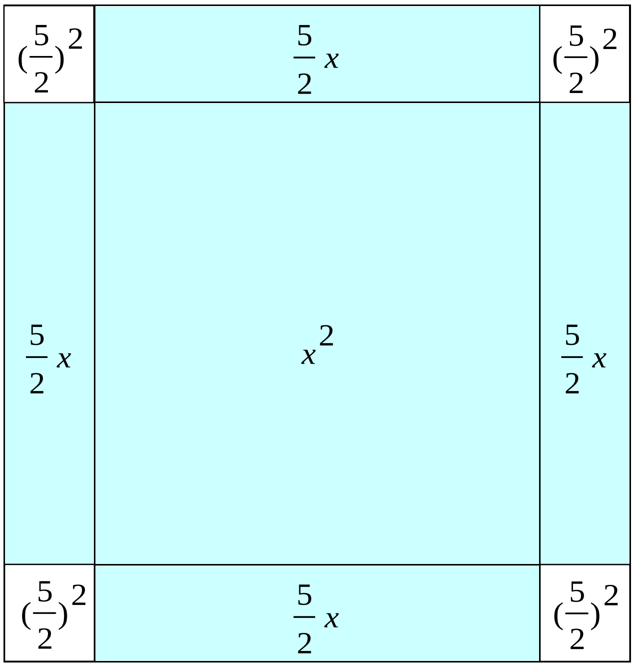
2. Лекция.

Квадратным называют алгебраическое уравнение 2-й степени, т.е. уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$.

При этом если D > 0, то корни действительные и различные $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;
при D = 0 корни совпадают (говорят, что уравнение имеет корень кратности два),
при D < 0 действительных корней нет.

Уравнения 2-й степени умели решать еще в Древнем Вавилоне во II тысячелетии до н.э. Формула корней квадратного уравнения «переоткрывалась» неоднократно. Один из первых дошедших до наших дней выводов этой формулы принадлежит индийскому математику Брахмагупте (около 598 г.). Среднеазиатский ученый ал-Хорезми (IX в.) в трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» получил эту формулу методом выделения полного квадрата с помощью геометрической иллюстрации. Суть его рассуждения видна из рисунка.



Он рассматривает уравнение $x^2 + 10x = 39$.

Площадь большого квадрата равна $(x+5)^2$.

Она складывается из площади $x^2 + 10x$ фигуры, закрашенной голубым цветом, равной левой части рассматриваемого уравнения и площади четырех квадратов со стороной 5/8, равной 25. Таким образом,

$$(x+5)^2 = 39 + 25;$$
$$x + 5 = \pm 8;$$
$$x_1 = 3; x_2 = -13.$$

4. Закрепление.

Решите уравнения:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0;$

2) $x^2 - x - 2 = 0;$

3) $5x^2 + 3x - 2 = 0;$

4) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0;$

5) $x^2 + 2(1+\sqrt{8})x + 8\sqrt{2} = 0;$

6) $x^2 + 4x - \sqrt{3} + 1 = 0;$

7) $\frac{(x-1)^2}{5} - \frac{x+4}{6} = \frac{2x-2}{3};$

8) $\frac{(x+2)(x-5)}{3}-\frac{11x+12}{10}=2-\frac{x-2}{3}.$

5. Дидактические материалы для индивидуальной работы.

Решите уравнения:

1) $x^2+5x-6=0;$

2) $x^2-6x+8=0;$

3) $x^2-6x+8=0;$

4) $\frac{x^2+3x}{5}=\frac{1-x}{2}-\frac{3x^2+8x}{14};$

5) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{(x-3)^2}{8}=\frac{(x+3)^2}{4}-3x.$

Теорема Виета.

Цели:
- обобщить знания учащихся по теме «Теорема Виета»;
- закрепить изученный материал:

Ход занятия.

1. Объяснение.

Для коэффициентов и корней квадратного уравнения выполняются соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}; \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Эти соотношения называются теоремой Виета, по имени французского математика Ф. Виета (1540-1603 гг.)
Особенно удобна эта теорема для приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$

Запомнить теорему Виета поможет стихотворение:

По праву достойна в стихах быть воспета
О свойствах корней теорема Виета.
Что проще, скажи, постоянства такого?
Умножишь ты корни,
И дробь уж готова.
В числителе «с», в знаменателе «а».
И сумма корней тоже дроби равна.
Хоть с минусом дробь эта, что за беда?
В числителе «b», в знаменателе «а».

Верна и теорема обратная теореме Виета. Ее также лучше применять для приведенного квадратного уравнения.
«Если числа x_1 и x_2 таковы, что выполняются равенства: $x_1+x_2=p$ и $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения».

2. Сообщение о Франсуа Виете (готовят ученики).
3. Закрепление.

Устно: $x^2+5x-6=0;$

$x^2-10x+21=0;$

$x^2+9x+14=0;$

$x^2+7x-18=0;$

$x^2-8x-20=0.$

Письменно:

1) Не вычисляя корней квадратного уравнения $2x^2+5x-1=0$, найдите:

а) $x_1x_2^2+x_2x_1^2;$

б) $x_1^2+x_2^2;$

в) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2};$

г) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1};$

д) $x_1^3+x_2^3;$

е) $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2};$

ж) $x_1^4+x_2^4;$

з) $\frac{x_1^3}{x_2}+\frac{x_2^3}{x_1}.$

Покажем, например, решение задания з)

$$\frac{x_1^3}{x_2}+\frac{x_2^3}{x_1}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1x_2}.$$

По теореме Виета $\begin{cases} x_1x_2=-\frac{1}{2}; \\ x_1+x_2=-\frac{5}{2}. \end{cases}$

$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$, откуда,

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2;$

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4;$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 = (-\frac{5}{2})^2 - 2(-\frac{1}{2}) = \frac{25}{4} + 1 = 7\frac{1}{4};$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (7\frac{1}{4})^2 - 2(\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{2} = (7^2 + 2\cdot 7\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{16}) - \frac{1}{2} = 49 + \frac{7}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}$$

$$= 49 + 3 + \frac{1}{16} = 52\frac{1}{16};$$

$$\frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1 x_2} = 56\frac{1}{16} : (-\frac{1}{2}) = -112\frac{1}{8}.$$

4. Дидактические материалы для индивидуальной работы.

Не решая квадратного уравнения $2x^2 + 7x - 1 = 0$, вычислите:

а) $x_1^2 + x_2^2$;

б) $x_1^3 + x_2^3$;

в) $x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2$;

г) $x_1^3 x_2^6 + x_1^6 x_2^3$.

Занятие 2: Игра «Математические крестики-нолики».

Цели:
- обобщить и систематизировать знания учащихся по теме «Квадратные уравнения».

Ход занятия.

1. Сообщение правил игры.

Правила игры: класс разбивается на 2 команды, которые решают задачи. С помощью жребия выбирается код команды – «крестик» или «нолик». Выигрывает та команда, которая набирает большее количество своих знаков. Команда, которая с очередным заданием справилась быстрее, имеет право выбора следующего конкурса. Непременное условие игры – начинать с конкурса «Вспомни».

Оформление: на доске расположена таблица с названием конкурсов, каждая графа которой содержит определенное задание.

Вспомни	Т	SOS
!	Черный ящик	Тест-прогноз
Реши задачу	Письма из прошлого	Эрудит

Если команда выиграла конкурс, то в таблице вместо названия конкурса проставляется код команды – «крестик» или «нолик», так участники могут следить за ходом игры.

2. Актуализация опорных знаний.

Конкурс «Вспомни». Заполнить таблицу, где *a*, *b* – коэффициенты квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где D – его дискриминант, N – число корней уравнения и x_1, x_2 – корни этого уравнения.

Уравнения	a	b	c	D	N	x_1, x_2	$x_1,+x_2$	$x_1 \cdot x_2$

$2x^2 = 0$ $x^2 + 4x = 0$ $x^2 - 9 = 0$ $x^2 + 5 = 0$ $5x^2 + 2 = 0$ $x^2 - 10x + 21 = 0$								

3. Игровые действия.

Следующие конкурсы проходят в таком порядке, в каком их выбирают команды, проставляя в таблице соответственно «крестик» или «нолик», поэтому структура урока может измениться в рамках игровых действий.

Конкурс «Т». Каждой команде предлагается ответить на следующие вопросы:

1. Определение квадратного уравнения.
2. Виды квадратных уравнений.
3. Что называется дискриминантом квадратного уравнения?
4. От чего зависит количество корней квадратного уравнения?
5. Каковы формулы для нахождения корней квадратного уравнения?
6. Формулировка теоремы Виета.

Конкурс «SOS». В этом конкурсе каждой команде предлагается выяснить следующее:

1. Какие уравнения называются биквадратными?
2. Сколько корней может иметь биквадратное уравнение?
3. Решить уравнения:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0;\ x^4 - x - 4 = 0;\ 4x^4 - 41x^2 + 100 = 0;\ x^4 = 21x^2 + 100;\ x^8 + 16 = 0;$$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0;\ x^4 - 1 = 0.$$

Конкурс «Тест-прогноз». Каждой команде предлагается решить следующие уравнения.

Вариант I

$$2x^2 + 3x - 5 = 0;\ 3x^2 + 5x - 2 = 0;\ 3x^2 + 2x - 5 = 0;$$

$$10x^2 + 5x = 0;\ x^2 + 3 = 3 - x;\ 2x^2 - 8 = 0;$$

$$5x + 2 = 2 - 2x^2;\ x^2 - 6x = 4x - 25.$$

Вариант II

$$5x^2 - 7x + 2 = 0;\ 2x^2 - 7x + 3 = 0;\ 5x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$12x^2 + 3x = 0;\ x^2 + 2 = x + 2;\ 3x^2 - 75 = 0;$$

$$2x^2 + 3 = 3 - 7x;\ x^2 + 2x = 16x - 49.$$

Конкурс «Реши задачу». Каждой команде предлагается старинная задача. На вопрос о возрасте одна дама ответила, что ее возраст таков, если его возвести в квадрат или умножить на 53 и из результата вычесть 696, то получится одно и то же число.

Конкурс «!». Каждой команде предлагается составить приведенное квадратное уравнение, имеющее два совпадающих корня, равных 3.

Конкурс «Письмо их прошлого». Задачи на квадратные уравнения встречаются в трудах индийских математиков уже с V в. н. э.

Вот одна из задач индийского математика XII в. Бхаскары:

Обезьянок резвых стая,
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам…
Стали прыгать, повисая…
Сколько ж было обезьянок,
Вы скажите, в этой стае?

Конкурс «Черный ящик». Каждой команде предлагается решить уравнение.

Вариант I

$$(x^2-5x+7)^2-2(x^2-5x+7)-3=0.$$

Вариант II

$$(x^2+3x-25)^2-2(x^2+3x-25)=-7.$$

Конкурс «Эрудит». Учитель или заранее подготовленный ученик делает сообщение о комплексных числах.

Рассмотрим уравнение $x^2-2x+2=0$.

Хотя оно имеет отрицательный дискриминант D=-4, напишем чисто формально формулы для его корней:

$$x_1=\frac{2+\sqrt{-4}}{2};\ x_2=\frac{2-\sqrt{-4}}{2}.$$

Упростив выражения, получим $x_1=1+\sqrt{-1};\ x_2=1-\sqrt{-1}.$

До сих пор мы считали, что такие выражения не имеют смысла, так как символу $\sqrt{-1}$ не соответствует никакое действительное число. Однако этот символ оказался очень полезным в математике. Его обозначают буквой i : $\sqrt{-1}=i$ и называют *мнимой единицей*.

С помощью мнимой единицы i и действительных чисел можно составлять буквенные выражения.

Например, $1+i;\ \frac{2+i}{i-1};\ \frac{2-i}{3};\ i^2+i^3.$

Для таких буквенных выражений создано счисление, подчиняющееся следующему правилу: эти выражения преобразуются как обычные буквенные выражения, однако при этом считают, что $i^2=-1$.

Выражение $a + bi,$ где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица, называют комплексным числом.

Действительное число a есть частный случай комплексного числа $a + bi$ при $b = 0$: $\mathrm{a} + 0\mathrm{i} = \mathrm{a}$.

Выражение $bi,$ где b – действительное число, называют мнимым числом. Например, $3i; - \mathrm{i}; - 7\mathrm{i}$ - мнимые числа. Мнимое число bi есть частный случай комплексного числа $a + bi$ при $a = 0 : 0 + \mathrm{bi} = \mathrm{bi}$. Наконец, считают, что $\sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{7} \cdot i$.

Итак, выражения $1 + \sqrt{-1}$ и $1 - \sqrt{-1}$ представляют собой комплексные числа $x_1 = 1 + i$ и $x_2 = 1 - i$.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называют *сопряженными*. Например, $3 + 2i$ и $3 - 2i$ есть сопряженные числа.

С введением комплексных чисел можно утверждать, что любое квадратное уравнение имеет два корня: действительные различные, если дискриминант положительный, действительные совпадающие, если дискриминант равен нулю, и комплексные (различные), если дискриминант отрицательный.

4. Подведение итогов.

Тема 2. Нестандартные способы решения квадратных уравнений.

Частные случаи нахождения корней полного квадратного уравнения.

Цели:
- проверить усвоение учащимися материала;
- познакомить с частными случаями нахождения корней квадратного уравнения;
- закрепить изученный материал в ходе решения уравнений;

Ход занятия.

1. Объяснение новой темы.

В некоторых случаях можно решить квадратные уравнения, не считая его дискриминант.

1) Если $a+b+c=0$, то $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}$.

Пример: $2x^2+3x-5=0$, то $x_1=1, x_2=-\frac{5}{2}$.

(Проверить по теореме обратной теореме Виета).

2) Если $a-b+c=0$, то $x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a}$.

Пример: $2x^2+3x+1=0$, то $x_1=-1, x_2=-\frac{1}{2}$.

3) Если $a=c=n, b=n^2+1$, то есть уравнение имеет вид $nx^2+(n^2+1)x+n=0$, то $x_1=-n, x_2=-\frac{1}{n}$.

Пример: $2x^2+5x+2=0$, то $x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2}$.

4) Если $a=c=n, b=-(n^2+1)$, то есть уравнение имеет вид $nx^2-(n^2+1)x+n=0$, то $x_1=n, x_2=\frac{1}{n}$.

Пример: $3x^2 - 10x + 3 = 0$, то $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$.

2. Закрепление.
Решите устно уравнения:

1) $3x^2 + 4x + 1 = 0;$

2) $5x^2 - 4x - 9 = 0;$

3) $4x^2 - 17x + 4 = 0;$

4) $7x^2 + 2x - 5 = 0;$

5) $5x^2 - x - 6 = 0;$

6) $5x^2 + 26x + 5 = 0;$

7) $13x^2 - 18x + 5 = 0;$

8) $100x^2 - 97x - 197 = 0;$

9) $x^2 - 17x - 18 = 0;$

10) $10x^2 - 101x + 10 = 0.$

3. Самостоятельная работа (проверяется в классе).
Решите уравнения:

1) $15x^2 - 226x + 15 = 0;$

2) $45x^2 - 10x + 6 = 0;$

3) $7x^2 - 13x - 20 = 0;$

4) $13x^2 + 170x + 13 = 0.$

4. Дидактические материалы для индивидуальной работы.
Решите уравнения:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0;$

2) $3x^2 - 10x - 13 = 0;$

3) $7x^2 - 50x + 7 = 0;$

4) $9x^2 + 82x + 9 = 0.$

Занятие 4. Решение квадратных уравнений методами геометрической арифметики.

Цели:

- проверить полученные знания;
- познакомить учащихся с идеями геометрической арифметики;
- показать учащимся возможность решения квадратного уравнения геометрическим способом;

Ход занятия.

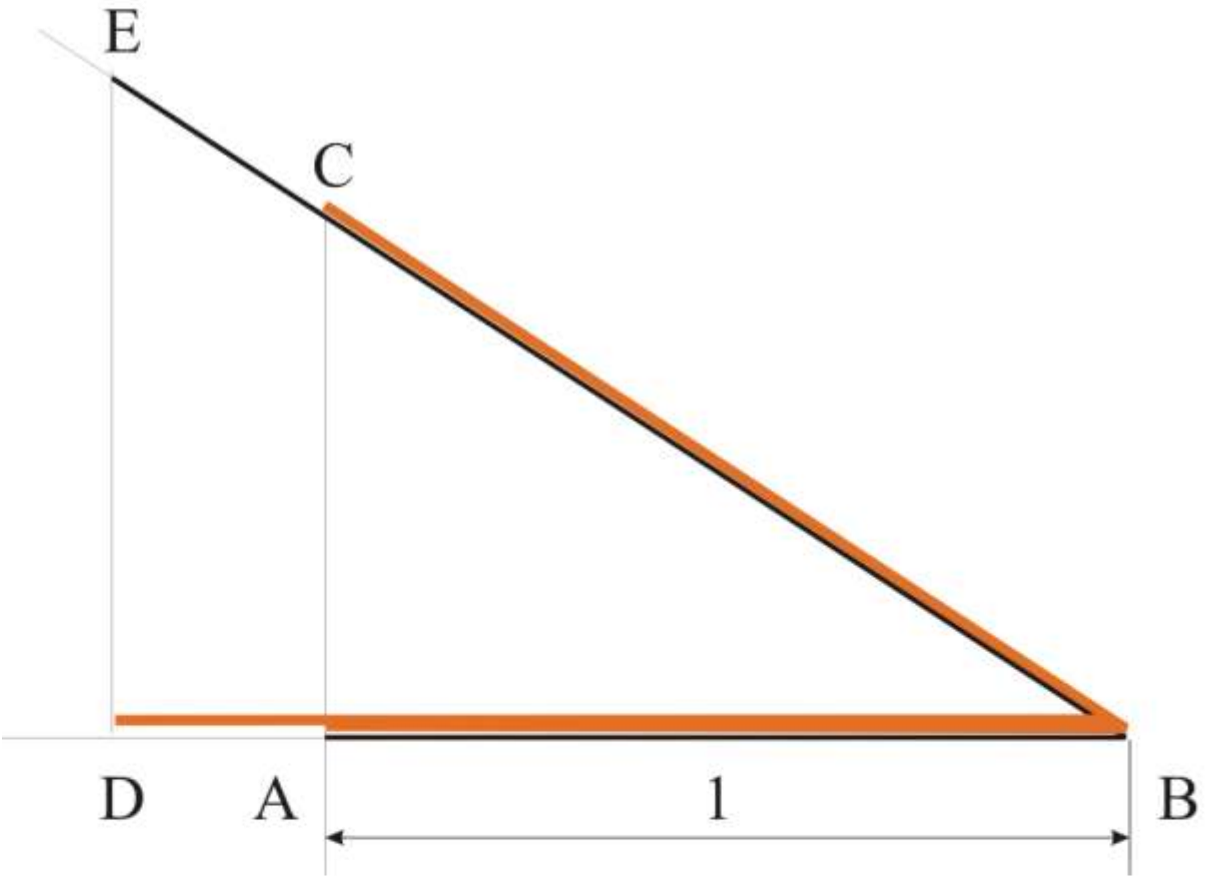
1. Лекция.

Никаких арифметических задач не решить, если не умеешь выполнять четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Можно ли выполнять арифметические действия не с числами, а с другими объектами, например с отрезками?

Давайте обсудим, как сложить и вычесть отрезки. (Идет обсуждение с учащимися.)

Рассмотрим рисунок, который позаимствуем из книги «Геометрия» великого французского ученого Рене Декарта (1596-1650). Как умножить и делить отрезки?

Вот что об этом пишет Декарт.



Пусть, например, *AB* является единицей, и требуется умножить *BD* на *BC*; для этого я должен только соединить точки *A* и *B*, затем провести *DE* параллельно *CA*, и *BE* будет результатом этого умножения.

Декарт не объясняет, почему так получается, так как считает, что его читатели сами это поймут. Мы тоже не будем объяснять этого – и по этой же причина.

Про деление Декарт пишет, снова обращаясь к этому же чертежу:

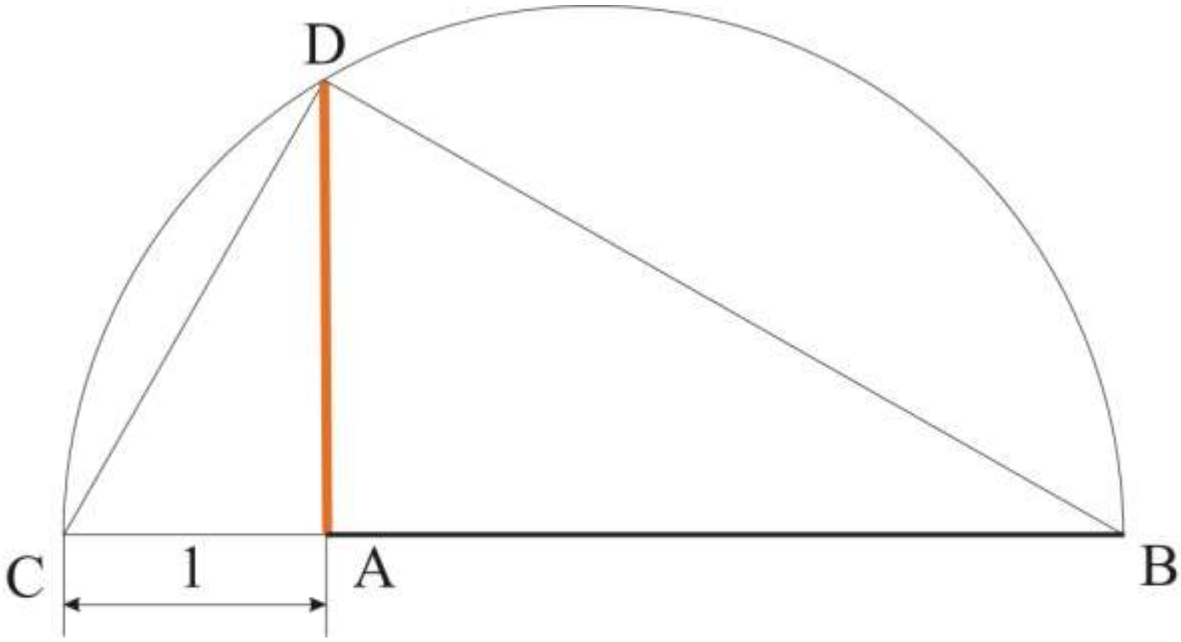
«Если *BE* нужно разделить на *BD*, то, соединив точки *E* и *D*, я провожу *AC* параллельно *DE*, и *BC* будет результатом этого деления».

Но если $AB \neq 1$? Из того же рисунка мы видим, что пропорция

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE}$$

будет справедлива всегда, если только $ED \parallel FC$; значит, мы всегда можем ее решить (т.е. найти какой-либо из четырех ее членов по трем данным) чисто геометрически. Все это и значит, что геометрически – при помощи циркуля и линейки – можно решать задачи на сложение, вычитание, умножение и деление отрезков, причем для умножения совсем не обязательно обращаться к площадям!

А можно ли геометрически извлечь квадратный корень? Оказывается, можно, более того, существует много приемов выполнения этой операции.



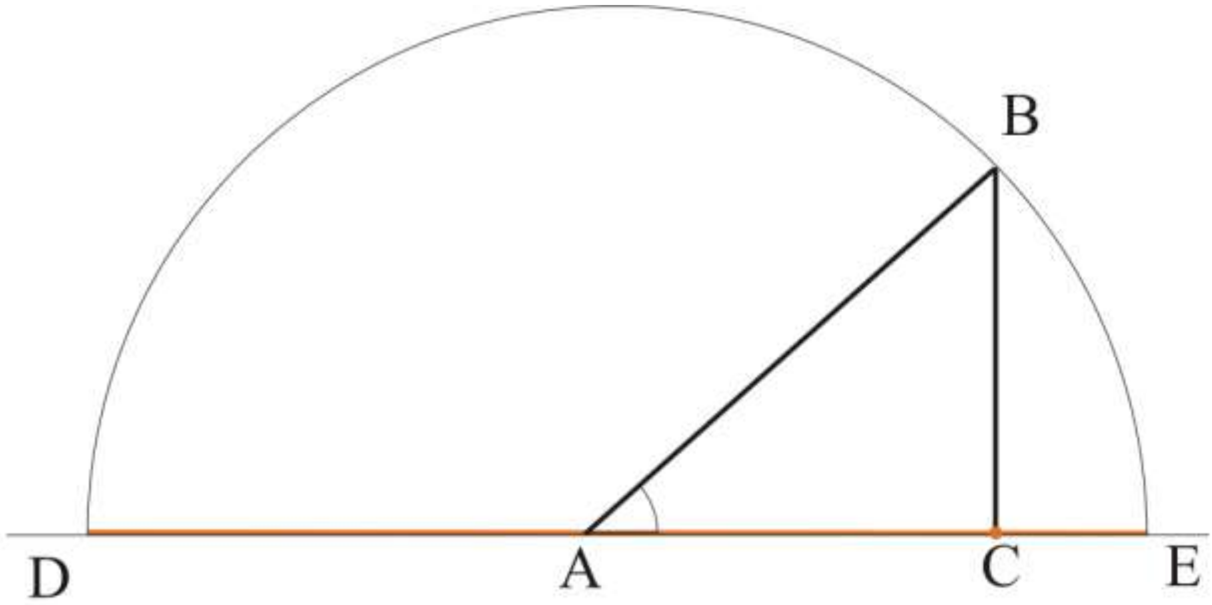
На рисунке AB – отрезок, из которого надо извлечь квадратный корень. Построим $AC = 1$. Приняв BC за диаметр окружности, построим ее (вам надо вспомнить, как с помощью циркуля и линейки делят пополам отрезки). А теперь проведем AD перпендикулярно диаметру. Это и есть квадратный корень из AB. Почему? Соедините точку D с концами диаметра, у вас получится прямоугольный треугольник, в котором AD – высота, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, а AC и AB – проекции катетов на гипотенузу. Закончите доказательство самостоятельно.

Из геометрического метода нахождения квадратный корней вытекает любопытнейший способ решения квадратных уравнений. Рассмотрим его на нескольких примерах.

Пусть надо решить уравнение

$$x^2 + 10x + 9 = 0.$$

Выполним следующее построение.



Сначала по катету $BC = \sqrt{q} = \sqrt{9} = 3$ и гипотенузе $AB = \frac{p}{2} = \frac{10}{2} = 5$ построим прямоугольный треугольник. Заметим сразу, что $AC = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$ А теперь радиусом, равным $\frac{p}{2} = 5,$ проведем окружность с центром в точке *A*. Она пересечет продолжение катета *AC* в двух точках, которые обозначим *D* и *E*. Заметим, что отрезок *DC* составлен из $AC = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = 4$ и $AD = \frac{p}{2} = 5,$ т.е. $DC = 9 = x_1.$ Отрезок же CE есть разность отрезков $AE = \frac{p}{2} = 5$ и $AC = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = 4,$ т.е. отрезок $CE = 1 = x_2.$ Почему так хорошо получается? Да потому, что отрезок *BC* есть корень квадратный из произведения отрезков x_1 и x_2.

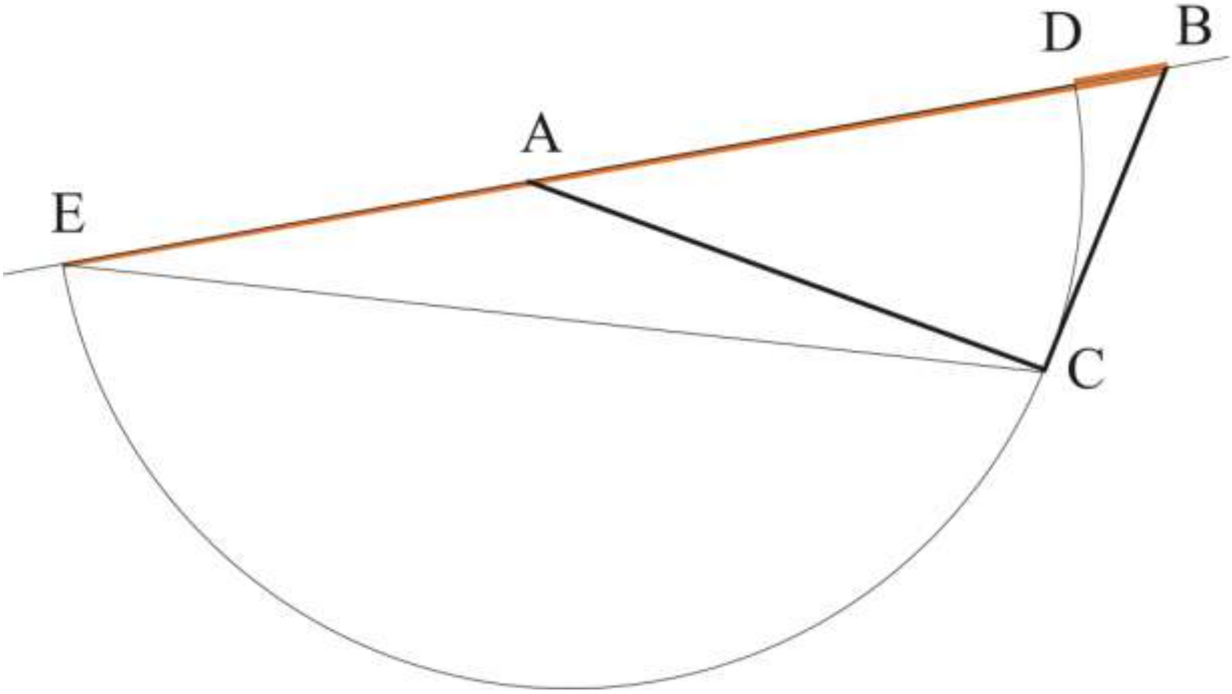
Итак, получается такой порядок. Сначала, имея уравнение $x^2 + px + q = 0,$ построим отрезки $\frac{p}{2}$ и $\sqrt{q}.$ Это всегда можно сделать. Начнем строить прямоугольный треугольник по двум отрезкам – гипотенузе и катету. Сначала отложим катет, равный $\sqrt{q}.$ Это тоже всегда получится. Возьмем теперь раствор циркуля, равный $\frac{p}{2}$, ножку циркуля поместим в точку B и проведем дугу окружности, чтобы получить точку A. А вот это получится далеко не всегда! Если катет $\sqrt{q}$ больше гипотенузы $\frac{p}{2}$, то треугольника не получится. Иначе можно сказать, что если $\sqrt{q} > \frac{p}{2}$, то $\frac{p^2}{4} - q$ – дискриминант квадратного уравнения, отрицателен и, как вы знаете из учебника, такое уравнение решений не имеет

Но если $p<0$? А ничего особенного – лишь бы q было положительным числом, а все остальное делается одинаково и для $p>0$, и для $p<0$. Надо только знать, какие знаки прописать числам, выражающим длины отрезком CE и BC. На этот вопрос ответьте сами.

В случае, когда перед q стоит знак минус (мы не будем считать q отрицательным числом, а просто будем говорить, что вычитается положительное число), построение производится иначе, и здесь старый рисунок нам уже не поможет.

Итак, пусть дано уравнение

$$x^2 + 8x - 9 = 0.$$



Построим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = \sqrt{q} = 3$ и $AC = \frac{p}{2} = 4.$ Его гипотенуза AB по теореме Пифагора $AC = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} = 5.$ Заметим сразу, что такое построение возможно всегда, тут нет каких-либо исключений. А теперь радиусом $\frac{p}{2} = 4$ проведем окружность в точке A. Она пересечет гипотенузу и ее продолжение в точках D и E. Нетрудно убедиться – на этот раз вы сделаете это сами, что $DB = \left|x_1\right|,$ а $BE = \left|x_2\right|.$ Знак модуля поставлен для того, чтобы можно было рассматривать эту задачу и для $p < 0$, но над знаками корней все же придется подумать.

Конечно, решать уравнения по формуле проще, чем выполнять эти замысловатые построения. Но нам интересно отметить сейчас важный факт: квадратные уравнения могут быть решены геометрическим путем. Могут быть! Иногда в науке важно установить саму возможность решения задачи заданными средствами, а уж надо будет решать именно этими средствами или не надо – другое дело.

2. Задание для исследовательской домашней работы.

Попробуйте решить квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ тригонометрически.
Указание: обозначим буквой φ угол BAC.

Отметим, что вы получите совершенно особый способ решения квадратных уравнений – тригонометрический.

Подводя итоги, можно сказать, что об одном и том же явлении мы рассказали на трех языках – алгебраическом, геометрическом и тригонометрическом. Еще раз подчеркнем – языки разные, а задача одна.

Занятие 5: Решение квадратных уравнений с применением циркуля и линейки.

Цели:

- научить учащихся решать квадратные уравнения с применением циркуля и линейки;
- проверить усвоение учащимися материала;
- закрепить умение решать квадратные уравнения.

Ход занятия.

1. Объяснение.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$ можно рассматривать как абсциссы точек пересечения окружности с центром $Q\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{a+c}{2a}\right)$, проходящей через точку $A(0; 1)$, и оси $0x$.

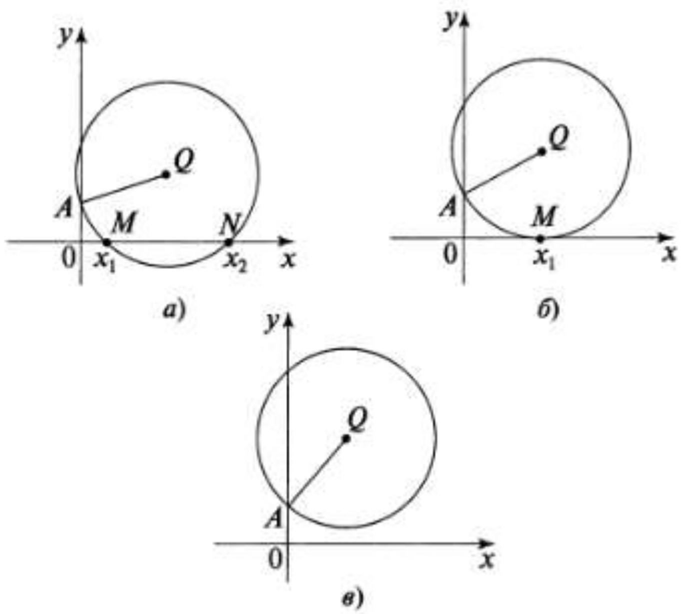


Рис. 1

Решение уравнения сводится к построению на координатной плоскости окружности с центром Q и радиусом QA (для этого и понадобятся инструменты) и определению абсцисс точек пересечения окружности с осью $0x$. Возможны три случая:

1) если $QA > \dfrac{a+c}{2a}$, то окружность пересекает ось $0x$ в двух точках $M(x_1; 0)$ и $N(x_2; 0)$ (рис. 1, а), уравнение имеет корни x_1, x_2;

2) если $QA = \dfrac{a+c}{2a}$, то окружность касается оси $0x$ в точке $M(x_1; 0)$ и $N(x_2; 0)$ (рис. 1, б), уравнение имеет корень x_1;

3) если $QA < \dfrac{a+c}{2a}$, то окружность не имеет общих точек с осью $0x$ (рис. 1, в), у уравнения нет корней.

Рассмотрим примеры решения квадратных уравнений описанным способом.

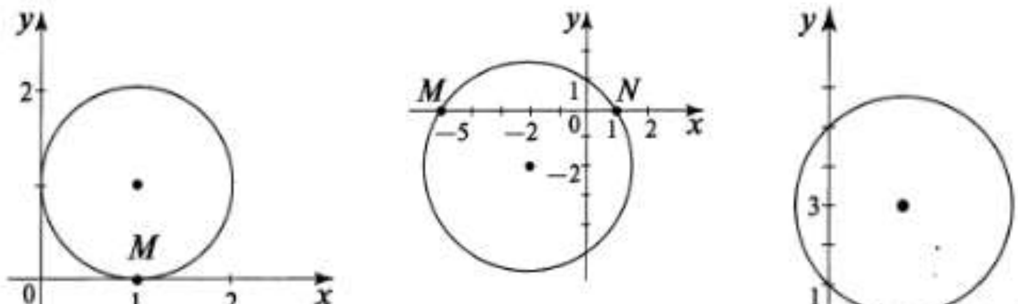


Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

Пример 1. Решите уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$.
Решение показано на рис. 2.
Ответ: 1.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.
Решение показано на рис. 3.
Ответ: -5; 1.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$.
Решение показано на рис. 4.
Ответ: нет корней.

Замечание. Конечно, Решать уравнения по формуле проще, чем выполнять построение. Но нам сейчас интересно отметить важный факт: квадратные уравнения могут быть решены с привлечением геометрии. Правда, этот способ не позволяет получать точные решения в случае произвольных коэффициентов уравнения.

2. Дидактические материалы для индивидуальной работы.
Решите уравнения:

1) $x^2 + 6x + 9 = 0$;

2) $x^2 - 8x = 0$;

3) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

4) $x^2 - 7x + 15 = 0$.

Тема 3. Решение уравнений сводящихся к квадратным.

Занятие 6: Квадратные уравнения с модулем.

Цели:
- научить учащихся решать квадратные уравнения с модулем;
- проверить усвоение учащимися материала;
- закрепить умение решать квадратные уравнения.

Ход занятия.

1. Объяснение.

Напомним, что модуль числа равен этому числу, если оно неотрицательное, и числу противоположному данному, если оно отрицательное, т.е. $|x| = \begin{cases} x, если\, x \ge 0; \\ -x, если\, x < 0. \end{cases}$

2. Закрепление.

Решите уравнения:

1) $x^2 - 7|x| = 0;$

2) $|x^2 + 5| = 6x;$

3) $|x^2 - x - 8| = -x;$

4) $|x + 3| = |2x^2 + x - 5|;$

5) $|3x^2 - 3x + 5| = |2x^2 + 6x - 3|;$

6) $3|2x^2 + 4x + 1| = |x^2 + 5x + 1|;$

7) $|x - 2|x^2 = 10 - 5x.$

Решение уравнения № 3.

$$|x^2 - x - 8| = -x.$$

Т.к. модуль числа неотрицателен, то $-x \ge 0,$ значит, $x \le 0.$

$x^2 - x - 8 = -x$

$x^2 - x - 8 + x = 0;$

$x^2 - 8 = 0;$

$x^2 = 8;$

$x = \pm 2\sqrt{2}.$

$x = 2\sqrt{2}$ - посторонний корень, т.к.

не удовлетворяет условию $x \le 0.$

или

$x^2 - x - 8 = -(-x);$

$x^2 - x - 8 = x;$

$x^2 - 2x - 8 = 0;$

$\frac{D}{4}\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac;$

$\frac{D}{4} = 1 + 8 = 9 > 0,$ значит, два корня.

$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a};$

$x_{1,2} = 1 \pm 3;$

$x_1 = 4,\ x_2 = -2.$

$x = 4$ - посторонний корень, т.к. не удовлетворяет условию $x \le 0.$

Ответ: $-2;\ -2\sqrt{2}.$

Решение уравнения № 6.

$$3\left|2x^2 + 4x + 1\right| = \left|x^2 + 5x + 1\right|.$$

$3\left(2x^2 + 4x + 1\right) = x^2 + 5x + 1$

$6x^2 + 12x + 3 = x^2 + 5x + 1;$

$6x^2 + 12x + 3 - x^2 - 5x - 1 = 0;$

$5x^2 + 7x + 2 = 0;$

$D = b^2 - 4ac;$

$D = 49 - 40 = 9 < 0,$ значит, два корня.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$

$x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 3}{10};$

$x_1 = -0{,}4,\ x_2 = -1.$

или

$3\left(2x^2 + 4x + 1\right) = -(x^2 + 5x + 1);$

$6x^2 + 12x + 3 + x^2 + 5x + 1 = 0;$

$7x^2 + 17x + 4 = 0;$

$D = b^2 - 4ac;$

$D = 289 - 112 = 177 > 0,$ значит, два корня.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$

$x_{1,2} = \dfrac{-17 \pm \sqrt{177}}{14}.$

Ответ: $-0{,}4;\ -1;\ \dfrac{-17 \pm \sqrt{177}}{14}.$

3. Дидактические материалы для индивидуальной работы.

Решите уравнения:

1) $x|x| + 7x + 12 = 0;$

2) $\left|x^2 + x - 3\right| = x;$

3) $\left|x^2 + 2x + 3\right| = 3x + 45;$

4) $\left|x^2 + 12x + 37\right| = \left|34 + 2x - 2x^2\right|.$

Ход занятия.

Занятие 7: Решение уравнений методом разложения на множители.

Цели:

- показать учащимся возможность решения уравнений методом разложения на множители;
- развивать умение учащихся раскладывать многочлены на множители;
- проверить усвоение материала.

Ход занятия.

1. Объяснение.

Многие уравнения степени выше второй, можно решить методом разложения на множители. Рассмотрим этот метод на примере решения уравнения:

$$x^4-25x^2+60x-36=0;$$

$$x^4-(25x^2-60x+36)=0;$$

$$x^4-(5x-6)^2=0.$$

Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(x^2-(5x-6))(x^2+5x-6)=0;$$

$$(x^2-5x+6)(x^2+5x-6)=0.$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю.

$(x^2-5x+6)=0$ или $(x^2+5x-6)=0;$

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения, тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=5; \\ x_1x_2=6. \end{cases}$$

$$x_1=2,\ x_2=3.$$

Пусть x_3 и x_4 корни уравнения, тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_3+x_4=-5; \\ x_3x_4=-6. \end{cases}$$

$$x_3=-6,\ x_4=1.$$

Ответ: $2; 3; -6; 1.$

2. Закрепление.

Решите уравнения:

1) $\left(5+4x\right)^2=\left(9-21x\right)(4x+5);$

2) $x^3+3x^2-2x-6=0;$

3) $x^3-x^2-8x+4=0;$

4) $2x^2\left(2x-5\right)+x\left(2x-5\right)+\left(5-2x\right)=0;$

5) $x^4-16x^2+24x-9=0;$

6) $2x^4-5x^3+2x^2-5x=0;$

7) $10x^4-45x=30x^2-15x^3.$

3. Дидактические материалы для индивидуальной работы.

Решите уравнения:

1) $\left(3-2x\right)\left(6x-1\right)=\left(2x-3\right)^2;$

2) $2x^3-5x^2-2x+5=0.$

3) $3x^2(2x-1)+x(2x-1)+2(1-2x)=0;$

4) $2x^4+3x^3-8x^2-12x-9=0;$

5) $5x^3+3x^2-5x-3=0.$

Занятие 8: Итоговое занятие.

Цели:

- проверить качество усвоения материала.

Ход занятия.

Вариант 1.
Решите уравнения:

1) $x+17=10\sqrt{x-4};$

Вариант 2.
Решите уравнения:

1) $x=32+2\sqrt{x+3};$

2) $(x+3)^4 - 13(x+3)^2 + 36 = 0;$

3) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0.$

2) $(2x-1)^4 - (2x-1)^2 - 12 = 0;$

3) $7(x + \frac{1}{x}) - 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) = 9.$

Вариант 3.
Решите уравнения:

1) $x - 3 + 4\sqrt{x-3} = 12;$

2) $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0;$

3) $x^3 + 4x^2 + 4 + 1 = 0.$

Вариант 4.
Решите уравнения:

1) $x + 2 - 13\sqrt{x+2} = -42;$

2) $(x+2)^4 + 2x^2 + 8x - 16 = 0;$

3) $x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$

Литература для учителя.

1. Алгебра. Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе / Под ред. Л.В. Кузнецовой. – Москва: Просвещение, 2007. – 191 с.
2. Алгебра. 9 класс. Итоговая аттестация – 2008 / Под ред. Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону: Легион, 2013. – 256 с.
3. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – Москва: Просвещение, 2007. – 335 с.
4. Галицкий Л.М. Курс алгебры 8-го класса в задачах / Л.М. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – Львов: Квантор, 1991. – 89 с.
5. Галицкий Л.М. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов / Л.М. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – Москва: Просвещение, 1992. – 271 с.

6. Неброева К.Н. Элективные курсы в предпрофильной подготовке / Сост. К.Н. Неброева – Смоленск, 2007. – 40 с.
7. Печурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры / Л.Ф. Печурин. – Москва: Просвещение, 1990. – 224 с.
8. Пресман А.С. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки. // Квант. –1972. – № 4.
9. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы / Под ред. М.И. Сканави. – Москва: ООО «Издательский дом «Оникс 21 век», 2004. – 608 с.
10. Система тренировочных задач и упражнений по математике. / Под ред. А.Я. Симонова. – Москва: Просвещение, 1991. – 208 с.
11. Студенецкая В.Н. Математика. 8-9 классы: сборник элективных курсов / В.Н. Студенецкая, Л.С. Сагателова. – Волгоград: Учитель, 2007. – 205 с.
12. Шахно К.У. Как готовиться к приемным экзаменам в ВУЗ по математике / К.У. Шахно. – Минск: Вышейшая школа, 1970. – 392 с.
13. Энциклопедический словарь юного математика / Под ред. А.П. Савина. – Москва: Педагогика, 1989. – 352 с.